جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
بیست و پنجمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۶

چند گزینه‌ای	مساله‌های کوتاه	مدت آزمون (دقیقه)
تعداد سوالات		
–	۶	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

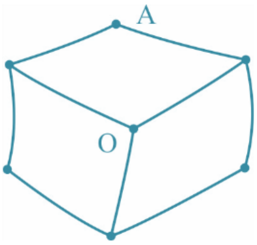
۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

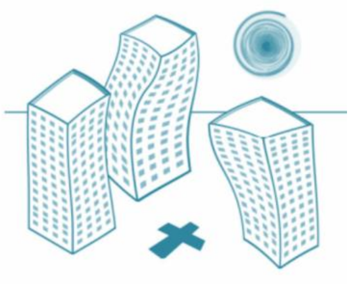
۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه است. نقطه‌ی M وسط ضلع BC است. نقطه‌ی D را روی ضلع AC به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $AD = AM$. محل برخورد دوم دایره‌های محیطی مثلث‌های ABC و BDC را P می‌نامیم. نشان دهید خط CP نیمساز زاویه‌ی ACB است.

۲- دو رأس مکعبی را O و A نامیده‌ایم به‌طوری‌که OA قطر یکی از وجوه مکعب است. تعداد مسیرهای به طول ۱۳۸۶ از O به خودش بیش‌تر است یا از O به A؟ (یک مسیر به طول n عبارت است از دنباله‌ای از $n+1$ رأس مکعب که هر دو رأس متوالی در دنباله، دو سر یک ضلع مکعب باشند.)



۳- در شهری تعدادی ساختمان وجود دارد. می‌گوییم ساختمانی به ساختمان دیگر مشرف است اگر خط واصل از بالای ساختمان اول به بالای ساختمان دوم با زمین زاویه‌ای بیش از ۴۵ درجه‌ی بسازد. می‌خواهیم در مکانی داده‌شده ساختمان جدیدی بسازیم. نشان دهید اگر ساختمان‌های قبلی به هم مشرف نباشند، می‌توان این کار را طوری انجام داد که باز هم هیچ ساختمانی به دیگری مشرف نباشد. شهر را صفحه‌ی افقی و هر ساختمان را پاره‌خطی عمود بر روی صفحه‌ی در نظر بگیرید.



۴- نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، می‌توان n عدد طبیعی متمایز یافت که مجموع آن‌ها مربع کامل و حاصل‌ضرب آن‌ها مکعب کامل باشد.

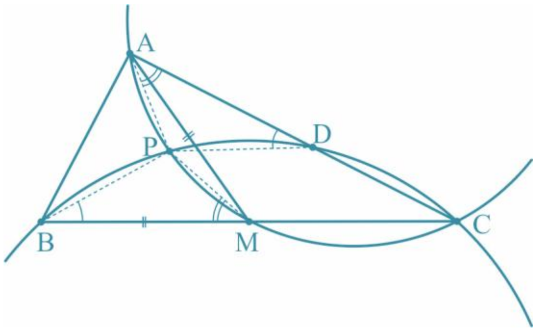
۵- دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقطه‌ی P بر هم مماس خارجی هستند و A نقطه‌ای داخل دایره‌ی C_1 است. دو مماس AM و AM' بر دایره‌ی C_2 رسم می‌کنیم (M و M' محل تماس مماس‌ها هستند). نقاط تقاطع دوم AM و AM' با دایره‌ی C_1 را به ترتیب N و N' می‌نامیم. نشان دهید:

$$\frac{PN}{PN'} = \frac{MN}{M'N'}$$

۶- فرهاد برای جشنواره‌ی خوارزمی ماشینی طراحی کرده است که وقتی روشن می‌شود شروع به چاپ کردن اعداد طبیعی ویژه‌ای می‌کند. خاصیت این ماشین این است که برای هر عدد طبیعی n، دقیقاً یکی از سه عدد $n, ۲n$ و $۳n$ را چاپ می‌کند. می‌دانیم ماشین عدد ۲ را چاپ می‌کند. ثابت کنید ۱۳۸۲۴ چاپ نمی‌شود.

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۶

۱- ازآنجاکه نقطه‌های D, P, B و C روی یک دایره‌ی قرار دارند نتیجه می‌گیریم $\angle PBC = \angle ADP$. هم‌چنین نقطه‌های M, P, A و C هم‌دایره هستند، درنتیجه $\angle CAP = \angle PMB$. ازآنجایی‌که مثلث ABC قائم‌الزاویه است، میانه‌ی وارد بر وتر (AM) نصف وتر است. پس $AM = MB$ و لذا $BM = AD$ از نتایج بالا به دست می‌آید که دو مثلث PMB و PAD با یکدیگر هم‌نهشت هستند. پس طول ارتفاع رسم شده از P در این دو مثلث برابر است که نتیجه می‌دهد نقطه‌ی P از دو ضلع زاویه‌ی $\angle ACB$ به یک فاصله‌ی است و در نتیجه روی نیم‌ساز این زاویه‌ی قرار دارد.



۲- راه‌حل اول. فرض کنید α_n تعداد مسیرهای به طول n از O به خودش (یا به دلیل تقارن تعداد مسیرهای به طول n از یک رأس به خودش) و b_n تعداد مسیرهای به طول n از O به A باشد (یا به دلیل تقارن تعداد مسیرهای به طول n از یک رأس به رأس غیر مجاور در یک وجه) یک مسیر از O به خودش را در نظر بگیرید. به $n-۱$. امین رأس این مسیر توجه کنید. طبق شرط مسئله‌ی این رأس باید خود O و یا رأسی باشد که فاصله‌اش از O برابر ۲ است. می‌دانیم که فاصله‌ی سه رأس از O برابر ۲ است و هم‌چنین تعداد مسیرهای به طول دو بین دو رأس که در یک وجه روبه‌رو به یک قطر هستند برابر ۲ و تعداد مسیرهای به طول ۲ از یک رأس به خودش برابر ۳ است. در نتیجه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\alpha_n = ۲(b_{n-۲} + b_{n-۲} + b_{n-۲}) + ۳\alpha_{n-۲}.$$

به همین ترتیب به‌سادگی به دست می‌آید که:

$$b_n = ۲(\alpha_{n-۲} + b_{n-۲} + b_{n-۲}) + ۳b_{n-۲}$$

با کم کردن این دو رابطه از یکدیگر داریم:

$$\alpha_n - b_n = \alpha_{n-۲} - b_{n-۲}$$

در نتیجه:

$$\alpha_{۱۳۸۶} - b_{۱۳۸۶} = \alpha_{۱۳۸۴} = \ldots = \alpha_{۰} - b_{۰} = ۱$$

بنابراین

$$\alpha_{۱۳۸۶} > b_{۱۳۸۶}$$

راه‌حل دوم. چهار رأس از رئوس مکعب روی عمودمنصف OA واقع هستند. این چهار رأس را رئوس میانی می‌گوییم. هر مسیر به طول ۱۳۸۶ از O به A از یکی از این رئوس میانی می‌گذرد. حال با فرآیند زیر از هر مسیر O به A مسیری از O به O می‌سازیم.
بعد از اولین باری که مسیر از یک رأس میانی عبور کرد، قرینه‌ی حرکت‌هایی که انجام داده‌ایم را نسبت به صفحه‌ی عمود منصف OA انجام می‌دهیم تا این بار به نقطه‌ی O برسیم.
پس هر مسیر از O به A به مسیری یکتا از O به O تبدیل می‌شود. دقت کنید که ازآنجاکه می‌توان عکس ا ین کار را انجام داد هیچ دو مسیری به یک مسیر تبدیل نمی‌شود. پس تعداد مسیرهای از O به O بیش‌تر یا مساوی مسیرهای O به A، است. اما دقت کنید که مسیری که از تعدادی پایین و سپس بالا رفتن از رأس O تشکیل‌شده است هیچ‌گاه از رئوس میانی نمی‌گذرد و بنابراین تبدیل یافته هیچ مسیری از O به A نیست. بنابراین در کل تعداد مسیرهای از O به O بیشتر است.

۳- فرض کنید ارتفاع ساختمان در نقطه‌ی X از صفحه‌ی را با h_x نمایش دهیم. اگر ساختمان‌های بناشده در دو نقطه‌ی A و B بر یکدیگر مشرف نباشند، با توجه به تعریف مشرف بودن این معادل آن است که زاویه‌ای که خط واصل بین دو سر ساختمان‌ها می‌سازند با زمین کم‌تر یا مساوی ۴۵° باشد. اگر این زاویه را θ بنامیم، داریم:

$$۱ - \left|\tan(۴۵^\circ)\right| \geq \left|\tan\theta\right| = \frac{\left|h_A - h_B\right|}{\left|A - B\right|} \Leftrightarrow \left|h_B - h_A\right| \leq \left|B - A\right|$$

که منظور از $\left|B-A\right|$ فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B در صفحه‌ی شهر است. فرض کنید که نقطه‌ای که می‌خواهیم در آن ساختمان جدید را بنا کنیم، نقطه‌ی P باشد و ارتفاع ساختمان مورد نظر را با h نمایش دهیم. شرط مشرف نبودن هیچ دو ساختمانی بعد از بنای این ساختمان ایجاب می‌کند که بعد از بنای این ساختمان برای هر ساختمان دیگر مثل ساختمان نقطه‌ی A داشته باشیم

$\left|h - h_A\right| \leq \left|P - A\right|$ و معادلاً $h \in \left[-\left|P-A\right| + h_A, \left|P-A\right| + h_A\right]$.

کافی است نشان دهیم که اشتراک این بازه‌ها برای ساختمان‌های مختلف شامل نقطه‌ای مثبت است، زیرا در این صورت h را برابر این نقطه می‌گیریم و بنابراین همه‌ی شرط‌های مورد نیاز برای مشرف نبودن‌ها برآورده می‌شود.

h را برابر کوچک‌ترین عدد در بین کران بالایی بازه‌های بالا برای ساختمان‌های مختلف بگیرید (دقت کنید که ازآنجاکه تعداد ساختمان‌های شهر متناهی است، حتماً کوچک‌ترین عددی وجود دارد). فرض کنید این عدد مربوط به ساختمانی باشد که در نقطه‌ی B بنا شده است. پس $h = h_B + \left|P - B\right|$.

مثبت بودن این عدد واضح است. حال باید نشان دهیم که این عدد در همه‌ی بازه‌ها قرار دارد. برای این منظور به برهان خلف فرض کنید که این عدد در بازه‌ی مربوط به ساختمان A نباشد.

$$h \notin \left[-\left|P-A\right| + h_A, \left|P-A\right| + h_A\right]$$

با توجه به این‌که h کوچک‌ترین کران بالایی در بین کران بالای بازه‌ها بود، تنها حالت ممکن برای این‌که h در این بازه‌ی نباشد، این است که h از کران پایین آن کمتر باشد. $\left(h < -\left|P-A\right| + h_A\right)$ اما این با توجه به نامساوی مثلث نتیجه می‌دهد که:

$$(h_B + \left|P-B\right| < -\left|P-A\right| + h_A \Rightarrow h_A - h_B > \left|P-A\right| + \left|P-B\right| \geq \left|A-B\right|$$

پس $\left|h_A - h_B\right| > \left|A-B\right|$ و بنابراین این دو ساختمان قبلاً به هم مشرف بوده‌اند که خلاف فرض مسئله‌ی است. این تناقض نشان می‌دهد که h معرفی‌شده در همه‌ی بازه‌ها قرار دارد و به‌این‌ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۴- برای اثبات حکم کافی است که به ازای هر عدد طبیعی n، n عدد طبیعی با شرایط مسئله‌ی بیابیم.
اعداد زیر را در نظر بگیرید:

$$۱^۳, ۲^۳, \ldots, n^۳$$

می‌دانیم که هرکدام از این اعداد مکعب کامل هستند. درنتیجه حاصل‌ضرب آن‌ها نیز مکعب کامل است. هم‌چنین به کمک استقرا اثبات می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر $\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$ است و درنتیجه مربع کامل است. این حکم برای $n = ۱$ به‌وضوح درست است. حال فرض کنید که حکم برای $n = ۱$ برقرار باشد، یعنی:

$$۱^۳ + ۲^۳ + \ldots + (n-۱)^۳ = (\frac{n(n-۱)}{۲})^۲$$

برای نتیجه گرفتن حکم در حالت n باید نشان دهیم که:

$$\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲ + n^۳ = \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

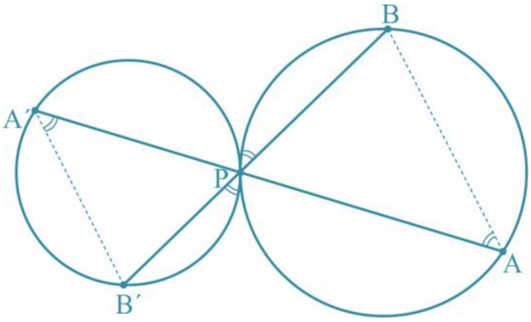
که این هم به‌سادگی قابل بررسی است:

$$\left(\frac{n(n-۱)}{۲}\right)^۲ + n^۳ = \frac{n^۴ - ۲n^۳ + n^۲}{۴} = \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$$

و به‌این‌ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۵- ابتدا یک لم را ثابت می‌کنیم:

لم. فرض کنید دو دایره C_1 و C_2 در P مماس خارجی باشند. دو قاطع گذرا از P، به ترتیب C_1 را در A و B، و C_2 را در A' و B' قطع می‌کند (برای بار دوم). در این صورت دو مثلث ABP و $A'B'P$ متشابه هستند.



اثبات.

مماس مشترک دو دایره در P را رسم می‌کنیم. در این صورت زاویه‌ی $\angle PAB$ با زاویه‌ی ظلی به رأس P که مربوط بـه کمـان BP اسـت برابر است. (کمانی که شامل A نیست.) این زاویه‌ی ظلی با زاویه‌ی ظلی مربوط به کمان $B'P$ در C_2 با رأس P متقابل به رأس است و لذا با هم برابر هستند. در نهایت این زاویه‌ی ظلی جدید هم بـا زاویـه‌ی $\angle PA'B'$ کـه روبـه‌رو همـین کمـان اسـت برابـر اسـت. پـس در کـل $\angle PA'B' = \angle PAB$. با استدلال کاملاً مشابه $\angle PBA = \angle P'B'A'$ و بنابراین حکم اثبات می‌شود.

فرض کنید S و S' به ترتیب، محل تقاطع دوم NP و $N'P$ با دایره C_2 باشند. در این صورت با توجه به این‌کـه $N'M'$ **و** NM بـر C_2 مماس هستند، برای قوت N و N' نسبت به C_2 می‌توان نوشت:

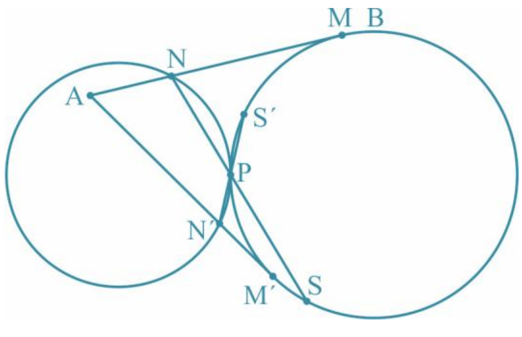
$$NM^2 = NP.NS \quad , \quad N'M'^2 = N'P.N'S'$$

حال دقت کنید که طبق لم بالا دو مثلث PSS' و PNN' متشابه هستند و لذا $\frac{NP}{PS} = \frac{N'P}{PS'}$ که این نتیجه می‌دهد $\frac{NP}{NS} = \frac{N'P}{N'S'}$

حال با ترکیب این نتایج داریم:

$$(\frac{NM}{N'M'})^2 = \frac{NM^2}{N'M'^2} = \frac{NP}{N'P}.\frac{NS}{N'S'} = \frac{NP}{N'P}.\frac{NP}{N'P} = (\frac{NP}{N'P})^2$$

در نهایت گرفتن جذر از دو طرف حکم را نتیجه می‌دهد.



۶- برای حل سؤال ابتدا دو لم را ثابت می‌کنیم:

لم ۱. اگر n عددی طبیعی باشد و $6n$ چاپ شود، n نیز چاپ می‌شود.

اثبات. اثبات کاملاً سرراست است.

بین سه عدد $2n$، $4n$ و $6n$ عدد $6n$ چاپ شده است، پس $2n$ و $4n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $3n$، $6n$ و $9n$، عدد $6n$ چاپ شده است، پس $3n$ و $9n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد n، $2n$ و $3n$ ، عددهای $3n$ و $2n$ چاپ نمی‌شوند، پس n باید چاپ شود.

لم ۲. اگر n عددی طبیعی باشد و $۲n$ چاپ شود، $۸n$ چاپ نمی‌شود ولی $۱۶n$ چاپ می‌شود.

اثبات. اثبات این لم هم مشابه لم قبلی است.

بین سه عدد n، $۲n$ و $۳n$، عدد $۲n$ چاپ شده است، پس n و $۳n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۲n$، $۴n$ و $۶n$، عدد $۲n$ چاپ شده است، پس $۴n$ و $۶n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۳n$، $۶n$ و $۹n$، عددهای $۳n$ و $۶n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۹n$ باید چاپ شود.

بین سه عدد $۹n$، $۱۸n$ و $۲۷n$، عدد $۹n$ چاپ شده است، پس $۱۸n$ و $۲۷n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۶n$، $۱۲n$ و $۱۸n$، عددهای $۶n$ و $۱۸n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۱۲n$ باید چاپ شود.

بین سه عدد $۴n$، $۸n$ و $۱۲n$، عدد $۱۲n$ چاپ شده است، پس $۴n$ و $۸n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۱۲n$، $۲۴n$ و $۳۶n$، عدد $۱۲n$ چاپ شده است، پس $۲۴n$ و $۳۶n$ چاپ نمی‌شوند.

بین سه عدد $۸n$، $۱۶n$ و $۲۴n$، عددهای $۸n$ و $۲۴n$ چاپ نمی‌شوند، پس $۱۶n$ باید چاپ شود.

حال در مورد مسئله‌ی اصلی به برهان خلف فرض کنید که $۱۳۸۲۴ = ۲^۹ \times ۳^۳$ چاپ شود. با سه بار استفاده از لم ۱ این نتیجه می‌دهد که باید عدد ۶۴ هم چاپ بشود. از طرف دیگر با توجه به این که ۲ چاپ شده است، طبق لم ۲ عدد ۱۶ هم باید چاپ شود. استفاده‌ی دوباره از لم ۲ نتیجه می‌دهد که $۶۴ = ۴ \times ۱۶$ چاپ نمی‌شود که با صحبت‌های بالا متناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که ۱۳۸۲۴ نباید چاپ بشود.